Keteraturan dalam Ketakteraturan pada Teori Graf

Prof. Dr. I Wayan Sudarsana, S.Si., M.Si.
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Tadulako

ORASI ILMIAH GURU BESAR
UNIVERSITAS TADULAKO

PALU, 2023

ORASI ILMIAH GURU BESAR
UNIVERSITAS TADULAKO

Keteraturan dalam Ketakteraturan pada Teori Graf

ORASI ILMIAH

Guru Besar Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Tadulako

Prof. Dr. I Wayan Sudarsana, S.Si., M.Si.

UNIVERSITAS TADULAKO
PALU, 2023

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Selamat pagi dan salam sejahtera bagi kita semua

Om Swastiastu

Nama Budha ya

Salam kebajikan.

Yang terhormat

- Rektor dan jajarannya beserta seluruh civitas akademika Universitas Tadulako
- Ketua senat dan jajarannya,
- Ketua dewan guru besar dan jajarannya,

Hadirin undangan yang saya muliakan**,**
Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa (Ida Sang Hiyang Widi Wasa) atas limpahan rahmat dan kemuliaan kepada kita semua, sehingga dapat berkumpul pada upacara Orasi Ilmiah ini. Dalam suasana yang penuh khidmat, untuk itu perkenankan saya sebagai Profesor/Guru Besar Fakultas MIPA Universitas Tadulako dalam **Bidang Ilmu Matematika Diskrit** menyampaikan orasi ilmiah berjudul:

Keteraturan dalam Ketakteraturan pada Teori Graf

Orasi ilmiah ini merupakan hasil sintesis selama menekuni ilmu Matematika, khususnya di bidang keilmuan Matematika Diskrit, juga pengalaman penelitian, pendampingan masyarakat dan pembimbingan mahasiswa. Dalam menekuni keilmuan Matematika Diskrit yang didukung dengan pengalaman dalam beraktifitas pada kegiatan pendidikan dan perencanaan pembelajaran kurang lebih 24 tahun, telah memberi kontribusi dari sisi keilmuan Matematika Diskrit dalam aplikasinya pada keamanan sistem informasi, melalui penguatan struktur dasar kriptografi modern.

Hadirin undangan yang saya muliakan,

Pendahuluan

Matematika tidaklah hanya aspek bilangan semata, namun menyangkut semesta pengamatan yang cermat atas fenomena di sekitar kita yang tersedia. Kecermatan pengamatan tersebut salah satunya menghasilkan teori tentang eksistensi suatu keteraturan dalam ketakteraturan pertama kali diungkapkan oleh Ramsey (1930) pada makalahnya yang berjudul "*On a problem of formal logic*". Seiring dengan banyaknya penerapan pada bidang matematika, teori informasi, komputasi, dan ilmu ekonomi, teori tersebut lebih dikenal dengan **teori Ramsey** (Espino, 2004). Posisi teori Ramsey sangat strategis dalam menopang perkembangan matematika secara umum karena tidak saja berkembang untuk bidang kelahirannya, yakni logika, tetapi juga pemakaiannya pada teori bilangan, analisis harmonik, ruang metrik, teori ergodik, probabilitas, komputasi, informasi dan komunikasi (Rosta, 2004).

Sebagai contoh, aplikasi bilangan Ramsey pada teori informasi dan komunikasi digambarkan sebagai berikut. Dalam teori informasi dan komunikasi, pada graf dengan order n bilangan α(G) merupakan maksimum pesan dengan panjang *n* yang dapat dikirim dalam sekali pengiriman tanpa ada kesalahan. Menentukan nilai eksak α(G) untuk nilai n ≥ 2 merupakan persoalan yang tidak mudah. Walau demikian, besaran $\alpha(G^n)$ dibatasi oleh bilangan Ramsey klasik. Teori Ramsey masih terus dikaji dari berbagai aspek pendekatan untuk mendukung nilai aplikasi pada berbagai bidang tersebut di atas. Artinya menemukan **keteraturan dalam ketakteraturan pada graf** akan memiliki implikasi kemajuan teknologi untuk pemenuhan hajat hidup umat manusia. Menemukan eksistensi keteraturan dalam ketakteraturan pada graf kajiannya disebut teori Ramsey, yang lebih dikenal dengan bilangan Ramsey graf. Menemukan bilangan Ramsey graf secara umum bukanlah persoalan mudah dan temuan-temuan yang dihasilkan hingga saat ini masihlah hasil yang parsial. Hasil penelitian yang disajikan pada naskah orasi ilmiah ini merupakan kontribusi nyata dan terbaru dari peneliti Universitas Tadulako dan termuat dalam tulisan Radziszowski (2021).

Teori Ramsey Graf

Erdos dan Szekeres (1935) kemudian mempopulerkan teori Ramsey dengan mengimplementasikannya pada graf, khususnya graf lengkap. Dalam teori graf, teori Ramsey dinyatakan sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan bulat positif n dan m, ***terdapat*** *bilangan bulat positif* r_0 *sedemikian hingga bila semua sisi graf lengkap* K_r *untuk setiap* $r \geq r_0$ *diwarnai dengan dua warna, maka* K_r *senantiasa memuat graf lengkap* K_n *atau* K_m *dengan sisi sewarna*.

Permasalahan lebih lanjut adalah pencarian bilangan r_0 terkecil sedemikian hingga memenuhi pernyataan tersebut di atas. Bilangan r_0 terkecil inilah yang kemudian disebut bilangan Ramsey klasik r(n, m) untuk kombinasi graf lengkap K_n dengan *n* titik dan graf lengkap K_m dengan m titik.

Penentuan nilai r(n, m) secara eksak untuk sebarang nilai *n* dan *m* telah banyak dikaji orang dalam empat puluh tahun terakhir. Namun, sampai saat ini baru ada nilai n kurang dri 4 dan m kurang dari 5 ditemukan oleh Mckay dan Radziszowski (1995) dengan bantuan program komputer. Sementara untuk *n* dan *m* yang lain, hanya batas atas dan bawahnya saja yang diketahui (Radziszowski, 2021). Hasil survey ini menggambarkan bahwa penentuan nilai r(n, m) secara eksak bukanlah permasalahan yang mudah. Oleh karena itu, pada perkembangan selanjutnya domain graf yang dikaji tidak dibatasi pada graf lengkap, tetapi diperumum menjadi graf sebarang. Seperti yang digambarkan dalam masalah berikut.

Diberikan sebarang dua graf G dan H. ***Tentukan*** *bilangan bulat positif terkecil* r_0 *sedemikian hingga untuk setiap graf F dengan* r_0 *titik senantiasa memenuhi sifat: F memuat G atau komplemen dari F memuat H.*

Bilangan r_0 pada permasalahan di atas disebut **bilangan Ramsey graf** untuk pasangan graf G dan H, yang selanjutnya akan dituliskan dengan **R(G, H)**. Penentuan nilai R(G, H) secara eksak juga bukanlah persoalan yang mudah, sebab hingga saat ini belum ada rumusan R(G, H) secara umum yang berlaku untuk sebarang graf G dan H. Burr (1984) menyatakan bahwa bila diberikan dua graf G, H dan bilangan bulat positif *n*, maka penentuan apakah nilai $R(G,H) \leq n$ adalah masalah NP-hard. Walau demikian, Chv´atal dan Harary (1972) telah berhasil memberikan batas bawah untuk R(G, H) secara umum, jika G adalah graf terhubung dengan *n* titik maka batas bawah C-H menjadi $R(G, H) \geq (n - 1)(h - 1) + 1$.

Batas bawah C-H sangat membantu dalam mencari nilai R(G, H) secara eksak untuk graf terhubung G versus H yang berbentuk tertentu. Pada beberapa kasus tertentu, nilai eksak R(G, H) sama dengan batas bawah C-H, seperti graf pohon T_n kombinasi graf lengkap K_m, Chv'atal (1977) menunjukkan bahwa $R(T_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$. Namun, tidak semua kombinasi graf berlaku demikian karena nilai eksak R(G, H) bisa jauh di atas batas bawah C-H. Sebagai contoh, untuk pasangan graf lintasan P_n dengan lintasan P_m, Gerencser dan Gyarfas (1967).

Bilangan kromatik *h* adalah banyaknya warna paling sedikit yang dibutuhkan untuk mewarnai titik-titik dari H sedemikian hingga tidak ada sepasang titik yang bertetangga mempunyai warna sama. Kromatik surplus *s* adalah kardinalitas dari himpunan titik sewarna terkecil atas semua pewarnaan titik yang mungkin pada H dengan *h* warna. Batas bawah yang baru ini dikenal dengan batas bawah Burr. Perlu dicatat bahwa jika $s = 1$ maka batas bawah Burr akan sama dengan batas bawah C-H.

Selanjutnya mengacu pada batas bawah Burr, graf G dengan order *n* dikatakan mempunyai sifat *elok* terhadap H, dinotasikan dengan H-elok, bila $R(G, H) = (n - 1)(h - 1) + s$. Telah banyak keluarga graf yang diketahui memenuhi sifat H-elok dengan kromatik surplus $s = 1$. Di antaranya, untuk *m* ganjil, graf bintang S_n adalah W_m-elok yang ditunjukkan oleh Hasmawati dkk. (2005); graf pohon T_n tidak isomorfik S_n adalah W_4 dan W_5-elok yang dibuktikan oleh~Baskoro dkk. (2002); sedangkan graf lintasan P_n adalah P_m-elok dengan kromatik surplus tertentu yang dibuktikan oleh Gerencser dan Gyarfas (1967). Namun demikian, belum banyak keluarga graf lain yang diketahui mempunyai sifat H-elok dengan kromatik surplus $s > 1$. Hal ini masih menjadi permasalahan terbuka yang menarik untuk dikaji lebih lanjut. Hingga Sudarsana (2016) dan Sudarsana (2021) memberikan rumus dan berhasil membuktikan bahwa graf siklus C_n memenuhi sifat tK_m-elok dan tW_4-elok dengan $t \geq 2$.

Bilangan Ramsey Kombinasi Graf Elok

Studi tentang bilangan Ramsey gabungan graf juga sudah dilakukan oleh beberapa peneliti, seperti Stahl (1975) yang memperoleh nilai eksak $R(G, K_m)$ dengan G adalah gabungan graf pohon (biasa juga disebut sebagai graf hutan). Pada tahun yang sama Burr dkk. (1975) memberikan nilai eksak untuk $R(t_1C_3, t_2C_3)$. Masih dengan komponen graf siklus, selanjutnya Yong dan Jian (1999) memberikan nilai untuk $R(t_1C_4,t_2C_4)$. Tujuh tahun kemudian, Baskoro dkk. (2006) melanjutkan kajian bilangan Ramsey pada gabungan graf. Mereka berhasil memberikan nilai eksak untuk $R(kS_n, W_m)$, $R(kS_n, W_4)$ pemikiran untuk memperumum hasil ini juga telah dilakukan oleh Hasmawati dkk. (2008). Mereka berhasil memberikan nilai eksak untuk $R(\mathrm{Union}(G_i), H)$, tetapi dengan syarat banyaknya titik dari komponen G_i untuk setiap i saling berdekatan dan semua G_i memenuhi sifat H-elok dengan kromatik surplus $s = 1$ (memenuhi batas bawah C-H).

Selanjutnya, Bielak (2009) memperumum hasil Hasmawati dkk. (2008) tersebut dengan tetap mempertahankan Syarat setiap komponennya memenuhi sifat H-elok dengan kromatik surplus s = 1. Sedangkan untuk gabungan graf yang setiap komponennya bersifat H-elok dengan kromatik surplus $s \geq 2$ masih merupakan permasalahan terbuka. Di samping itu, kajian bilangan Ramsey gabungan graf yang setiap komponennya tidak memenuhi sifat H-elok juga dilakukan oleh Baskoro dkk. (2008) dengan memberikan nilai eksak $R(kS_n,W_4)$ untuk *n* genap dan $k \geq 2$. Lebih jauh, Hasmawati dkk. (2008) memberikan batas atas R(kG, H) untuk graf G dan H sebarang, dan nilai eksak $R(kS_n,W_m)$ untuk m = 2n - 4, 2n - 6 dan 2n - 8 dengan $n \geq 5$ ganjil. Namun, secara umum perilaku (sifat) bilangan Ramsey gabungan graf untuk kasus ini masih belum diketahui.

Kajian lain yang juga dilakukan terhadap penentuan bilangan Ramsey R(G, H) untuk gabungan graf G kombinasi graf H adalah bila tidak semua komponen dari G bersifat H-elok. Secara umum bilangan Ramsey gabungan graf H-elok dengan kromatik surplus *s* = 1 telah diteliti oleh Hasmawati dkk. (2008) dan Bielak (2009).

Dengan demikian, investigasi pada kasus ini akan dimulai dengan memberikan beberapa contoh graf sederhana yang memenuhi sifat H-elok dengan kromatik surplus $s \geq 2$. Di antaranya, dibuktikan bahwa graf siklus C_n dan lintasan P_n masing-masing adalah elok terhadap tK_2 dan tK_3 oleh Sudarsana (2016). Dengan memanfaatkan hasil tersebut untuk $G \simeq \bigcup_{i=1}^{k} l_i C_{n_i}$ dan $G \simeq \bigcup_{i=1}^{k} l_i P_{n_i}$ selanjutnya bilangan Ramsey gabungan graf $R(G, tK_2)$ dan $R(G, tK_3)$ akan dapat ditentukan. Penyelidikan dilanjutkan dengan melihat sifat semua komponen G_i dari G secara umum, yaitu semua G_i memenuhi sifat H-elok dengan kromatik surplus sebarang ($s \geq 1$). Sebagai seorang peneliti, dengan tekun akhirnya Sudarsana (2016) dan Sudarsana (2021) berhasil membuat rumus umum bilangan Ramsey gabungan graf siklus yang berifat elok terhadap tW_4 dan tK_m juga termuat dalam rangkuman tulisan oleh Radziszowski (2021).

Kesimpulan

Studi eksistensi keteraturan dalam ketakteraturan pada graf memberikan kontribusi secara parsial pada area teori Ramsey, yakni gabungan graf siklus yang memuat semua komponennya yang bersifat elok terhadap graf tW_4 dan tK_m. Kontribusi hasil penelitian ini terangkum dalam dokumen survey oleh Radziszowski (2021). Walau aspek parsial ini telah tuntas dirumuskan, namun kajian berikutnya masih perlu dilakukan untuk mempertimbangkan bahwa tidak semua komponen G yang memenuhi sifat H-elok bahkan lebih ekstrimnya, tak satupun komponen G bersifat elok terhadap H. Penentuan bilangan Ramsey gabungan graf secara umum masih sangat sulit ditentukan. Sehinga aspek kajian kedepannyapun masih berpeluang untuk dilakukan secara parsial, artinya mengkaji secara graf kasus per kasus termasuk aspek aplikasinya pada keamanan sistem informasi.

Ucapan Terima Kasih

Puji syukur diucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa (Ida Sang Hiyang Widi Wasa) atas rahmat dan karunia-Nya sehingga saya bisa berdiri disini menyampaikan orasi ilmiah guru besar sebagai salah satu tanggungjawab guru besar di Universitas Tadulako. Kepada seluruh pihak yang telah memberikan dukungan bimbingan, dorongan, bantuan dan doa sehingga saya dapat mengabdikan diri sebagai dosen hingga dapat mengemban jabatan Profesor/Guru Besar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Tadulako.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia atas penetapan saya menjadi Profesor/Guru Besar dalam Bidang Ilmu Matematika Diskrit, Universitas Tadulako mulai tanggal 1 Juni 2023. Terima kasih disampaikan kepada seluruh pihak yang telah memproses usulan dan menyetujui pengangkatan Profesor/ Guru Besar mulai dari tingkat Program Studi/Jurusan/ Fakultas MIPA, Rektorat Universitas Tadulako, sampai Direktoral Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset, dan Teknologi.

Ucapan terima kasih dan penghargaan yang tinggi disampaikan kepada Rektor Universitas Tadulako Prof. Dr. Ir. Amar, S.T, M.T. dan jajarannya; Ketua Senat Universitas Tadulako Prof. Dr. H. Djayani Nurdin, S.E., M,Si beserta jajarannya, Ketua Dewan Guru Besar Universitas Tadulako Prof. Dr. Ir. H. Fahurrahman, M.P. beserta jajarannya; Dekan Fakultas MIPA Universitas Tadulako Dr. Lufsyi Mahmudin, S.Si.,M.Si beserta jajarannya, Ketua Senat FMIPA Universitas Tadulako beserta jajarannya; Ketua Jurusan Matematika beserta Koorprodi dan dosen Matematika, Koorprodi beserta dosen Statistika.

Ucapan terima kasih dan penghargaan disampaikan kepada Pimpinan dan seluruh staf Kepegawaian Rektorat Universitas Tadulako, serta seluruh dosen dan tenaga kependidikan Fakultas MIPA Universitas Tadulako yang telah memberikan dukungan, dorongan dan bantuan mulai dari persiapan pengusulan hingga terbitnya jabatan guru besar.

Ucapan terima kasih kepada Pembimbing Skripsi saya di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada (UGM) **Dr. Aluysius Sutjijana, M.Sc** yang sudah menanamkan secara fundamental keilmuan Matematika; Rasa hormat dan terima kasih tak terhingga kepada pembimbing Tesis sekaligus Promotor Disertasi saya di Program Studi Matematika FMIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) **Prof. Edy Tri Baskoro, Ph.D** beserta copromotor Dr. Hilda Assiyatun, dan Dr. Saladin Uttunggadewa yang sudah mengantarkan saya hingga sampai pada podium yang terhormat ini, serta tak lupa guru-guru dan sahabat saya dari SDN N 4 Balinggi, SMP N Tolai, SMP N 7 Palu, dan SMA N 1 Palu, diucapkan terima kasih dan penghargaan yang setinggi-tingginya atas ilmu dan kebersamaan yang telah diberikan.

Ucapan terima kasih dan permohonan maaf kepada orang tua Ayahanda I Nyoman Rempon dan Ibunda Ni Wayan Demih. Ucapan terima kasih kepada ayah/ibu mertua Ayahanda I Ketut Gules dan Ibunda I Nyoman Lemping. Kepada adik-adik kandung serta kakak dan adik ipar diucapkan terima kasih atas dukungannya.

Ucapan terima kasih kepada keluarga tercinta, Ni Wayan Puspawati istri yang telah setia mendampingi hingga saat ini, begitu pula kepada anak Niluh Putu Aprillia Puspitadewi Sudarsana Putri, Ni Made Shintadewi Sudarsana Putri, dan I Komang Rama Sudarsana Putra atas doa, kesabaran, dan pengorbananya selama ini. Terima kasih pula kepada keluarga yang jauh di Bali atas support dan doanya tanpa henti hingga sampai pada cita-cita ini. Tak lupa pula disampaikan terima kasih pada sahabat-sahabat seperjuangan pada masa sarjana, magister, dan doktor serta KMHD-UGM 92 yang telah membantu hingga saya bisa sampai pada tahap ini.

Terima kasih dan penghargaan kepada Bapak/Ibu dan para hadirin atas kesediaannya menghadiri orasi ilmiah ini. Kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan atas terselengaranya orasi ilmiah ini, disampaikan terima kasih.